Lycée sec
H.GHZEZ
4éme MATHS

BAC BLANC

MATHEMATIQUES :4h

MR : Y.BOULILA
A.S 2010/2011

EXERCICE N° I (4.5points)

A- On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct

(o, $\vec{u}$, $\vec{v}$). Soit f_a l'application qui associe au point M d'affinez le point M' d'affixe

z' tel que : z' = $\left(\frac{1}{2}+ai\right)Z+\frac{3}{2}-3ai \quad a \in$ □

1°) Reconnaitre l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes de a.

a) a = $-\frac{1}{2}i$ b) $a = i$ c) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a = \frac{1}{2}$

2°) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a \in$ □ et on note $\theta = arg\left(\frac{1}{2}+ai\right)$

on note $M_o = O(0,0)$ et $\Omega(3,0)$ pour tout entier naturel $n \in$ □ on pose $M_{n+1} = f(M_n)$.
Soit z_n l'affine de M_n.

a) Montrer que f_a est une similitude directe de rapport $k = \dfrac{1}{2\cos\theta}$

b) Calculer et écrire sous forme algébrique, les nombres z_1 et z_2 en fonction de a.

c) Montrer que pour tout $n \in$ □ , on a : $Z_n = 3 - 3\left(\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$

B- ABCD et DEFG sont des carrés directs tels que E est le milieu de $[CD]$

1°) Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B.

a) Déterminer les caractéristiques de S

b) Déterminer l'image par S du point E et la mesure principale de ($\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$)

2°) On note (C) le cercle de diamètre $[BD]$ et k le point d'intersection des droites (AE) et (BF)

a) Etablir que $K \in$ (C)

b) En déduire que (KD) et (BF) sont perpendiculaires.

3°) On note (C') le cercle de diamètre $[DF]$

a) Etablir que $K \in$ (C')

b) En déduire que les points C ; G et K sont alignés.

EXERCICE N° II : (4points)

La fonction de f e $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$ st définie sur $[0,+\infty[$ par :

(C) désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un R.O.N $(0,\vec{i},\vec{j})$ unité graphique : 3 cm.

1°) a) Etudier le signe de f'(x) sur $[0,+\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

2°) Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une asymptote (D) à préciser.

3°) Etablir que l'équation « f(x) = 0 » admet une unique solution x_0 sur $[0,+\infty[$ et que 1< $x_0 < 2$

4°) Tracer (C) et (D)

5°) Soit g la fonction définie sur I = $[1,+\infty[$ par g (x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1

a) Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation g(x) = x
b) Donner le tableau de variation de g sur I.
   En déduire que : pour tout x ∈ I ; g(x) ∈ I .
c) Montrer que pour tout x ∈ I ; $x \in I |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$
   Enoclcuire que pour tout $x \in I; |g(x) - x_0| \leq \frac{3}{e^2}|x - x_0|$

6°) La suite $(a_n)_n$ est définie par :

a_0 = 1 et pour tout $n \in \square ; a_{n+1} = g(a_n)$

a) Montrer que : pour $n \in \square$; $a_n \in I$

b) Montrer que pout tout $n \in \square$; $|a_n - x_0| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

c) Déterminer la limite de (a_n) en $+\infty$

d) Détermine le plus petit entier n_0 tel que :

$$\left|a_{n_0} - x_0\right| \leq \frac{1}{1000}$$

EXERCICE N° III (3.5 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$. On donne le point A(12 ;18).

On désigne par B le point de l'axe $\left(0, \overrightarrow{e_1}\right)$ et par C le point de l'axe $\left(0, \overrightarrow{e_2}\right)$ tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1°) Démontrer que le couple (x,y) est solution de l'équation (E) : 2x + 3y = 78.

2°) On veut trouver tous les couples (B, C) ayant pour coordonnées des entiers relatifs.

a) Montrer que l'on est ramené à l'équation (E) avec $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

b) A partir de la définition de B et C, trouver une solution (x_0,y_0) de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

c) Démontrer qu'un couple (x,y) est solution de (E) si et seulement si il est de la forme (12+3k ; 18-2k) où $k \in \mathbb{Z}$

d) Combien y a-t-il de couple de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs tels que :

$$-6 \leq x \leq 21 \text{ et } -5 \leq y \leq 14.$$

EXERCICE N° IV (4points)

Dans l'espace muni d'un repère R.O.N $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne la sphère(S) : $x^2 + y^2 + z^2 = 62$ et le plan (π) passant par A(0,1,1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

1°) a) Déterminer une équation cartésienne de (π)

b)L'intersection de (π) et (S) un cercle déterminer le centre H et le rayon r de ce cercle c) Soient P et Q deux points de (S) tels que : P(7,3 , α) avec et $\alpha > 0$ et $Q(6, \beta, 1)$ avec $\beta > 0$

Déterminer une équation pour chacun des plans tangents à(S) en P et en Q

c) Déterminer une équation du plan passant par A et dont l intersection avec (S) est un cercle de rayon le plus petit possible

2°) Soit h l'homothétie de l'espace de centre O et de rapport k, $k \in IR$

a) Donner une équation de (S') = h(S)

b) Pour quelles valeurs de k le point A reste à l'intérieur de (S')

EXERCICE V (4points)

plan est muni d un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et l unite graphique est 2cm les fonctions f et F sont définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(\frac{x}{x+1})$ et $F(x) = x\ln(\frac{x}{x+1})$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le repère précédent.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations .

2) (a) – Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K que l on déterminera .

(b)- Tracer dans le repère précedent la courbe (C) et la courbe (C′) de f^{-1} .

3) (a)-Démontrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$

(b)- Endéduire , en , cm^2 , l aire du domaine plan (D) définie par : (D) = $\{M(x, y) \in P ; 1 \leq x \leq 2 \; et \; f(x) \leq y \leq 0\}$

4) Pour tout réel x de $]-\infty, 0[$ on pose a (x) = $\int_x^{\frac{1}{e}} f^{-1}(t)dt$

(NB : on ne calculera pas $f^{-1}(t)$)

Calculer a $(\frac{1}{e})$. Etudier le signe de a (x) sur $]-\infty, 0[$

BONNE CHANCE